Задачи с параметрами

Об авторах

Максименко Марианна Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики РЭУ имени Г.В. Плеханова. В 1984 г. окончила механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова по кафедре математической логики. В 1991-1994 гг. обучалась в аспирантуре Руанского университета (Франция), имеет ученую степень (PhD) доктора информатики Руанского университета.
В РЭУ им. Г.В. Плеханова читает лекции и проводит семинары по следующим дисциплинам: "Дискретная математика", "Линейная алгебра", "Математический анализ", "Теория вероятностей и математическая статистика". Ведет занятия на подготовительных курсах "Математика. Подготовка к ЕГЭ".
Автор учебников для студентов и пособий для поступающих в ВУЗы. Опубликован ряд статей в российских и зарубежных научных журналах по математике и педагогике.

Маслякова Ирина Николаевна – старший преподаватель кафедры высшей математики РЭУ им. Г.В. Плеханова. В 1991 году окончила механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова по кафедре теории чисел. Занимается исследованиями в области современной теории тестов, имеет печатные работы в научных журналах по этой теме.
В РЭУ им. Г.В. Плеханова читает лекции и проводит семинары по дисциплинам: "Математический анализ", "Теория вероятности и математическая статистика", "Функциональный анализ", "Линейная алгебра", "Финансовые вычисления". Ведёт занятия на подготовительных курсах "Математика. Подготовка к ЕГЭ". Является экспертом ЕГЭ по математике.

Ерохина Татьяна Александровна – учитель математики Экономического лицея при РЭУ им. Г. В. Плеханова, эксперт ЕГЭ.
В 1996 году закончила математический факультет ТГПУ им. Л. Н. Толстого.
Является автором научных статей по теме "Формирование методологических знаний в процессе обучения математике".

Содержание

1. Задачи с параметрами на квадратный трёхчлен
   1.1. Задачи на теорему Виета
   1.2. Задачи, использующие расположение графика параболы относительно оси Ox
   1.3. Задачи на дополнительные условия расположения корней квадратного уравнения
2. Системы линейных уравнений с параметрами
3. Линейные уравнения с параметром
4. Линейные неравенства с параметром
5. Уравнения параметром и модулем

Большие затруднения вызывают у абитуриентов задачи с параметрами.

Абитуриенты неизменно жалуются на то, что задач с параметрами в школе решать им не приходилось, а экзаменаторы и составители ЕГЭ считают, что в задачах на параметры никаких фактов, не пройденных в школе использовать не приходится.

Так что практически в каждом варианте есть обязательно хотя бы одна задача с параметрами, в стандартном варианте профильного ЕГЭ на настоящее время, это задание №18.

Прежде чем решать задачи, соответствующие этому уровню сложности, рассмотрим простые задачи и некоторые теоретические факты.

§ 1. Задачи с параметрами на квадратный трехчлен

1.1. Задачи на теорему Виета

Для некоторых задач с параметрами часто используется теорема Виета. Сформулируем ее.

Теорема Виета

Дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0.$ Если x_1, x_2 суть корни квадратного уравнения, то они связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Доказательство: Если x_1, x_2 – корни уравнения, то

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

Таким образом,

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{D}-b-\sqrt{D}}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{D}\right)^2}{2a}=-\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{c}{a},$$

Пример 1

При каких значениях параметра a один из корней квадратного уравнения $x^2+(2a-1)x+a^2+2=0$ вдвое больше другого?

<u>Решение</u>

Из данных задачи и теоремы Виета получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2a+1, \\ x_1\cdot x_2=a^2+2, \\ x_1=2x_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2+x_2=-2a+1, \\ 2x_2^2=a^2+2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=\dfrac{-2a+1}{3}, \\ 2\cdot\left(\dfrac{-2a+1}{3}\right)^2=a^2+2. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(4a^2-4a+1\right)=9a^2+18 \Rightarrow a=-4.$$

Убедимся, что при этом a дискриминант положителен:

$D=81-4\cdot 18>0$ истинно.

Ответ: – 4.

Пример 2

При каких значениях параметра p корни квадратного уравнения $(p-1)x^2+2px-4+p=0$ положительны и различны? В ответе указать длину интервала.

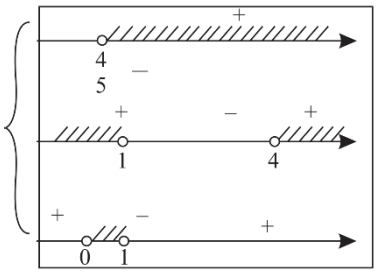
<u>Решение</u>

Во-первых, для того чтобы квадратное уравнение имело два корня, необходимо и достаточно, чтобы $D>0$.

Во-вторых, оба корня положительны, тогда и только тогда, когда $\begin{cases} x_1\cdot x_2>0 \\ x_1+x_2>0 \end{cases}$, а так как $\begin{cases} x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \end{cases}$, получаем систему $\begin{cases} \dfrac{D}{4}>0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \\ \dfrac{b}{a}<0. \end{cases}$

Решаем ее

$$\begin{cases} p^2-(p-1)(p-4)>0 \\ \dfrac{-4+p}{p-1}>0 \\ \dfrac{2p}{p-1}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5p-4>0 \\ \dfrac{p-4}{p-1}>0 \\ \dfrac{p}{p-1}<0 \end{cases} \Rightarrow$$

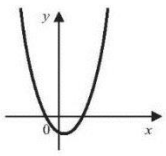
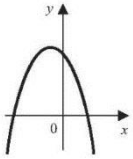
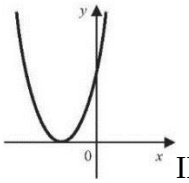
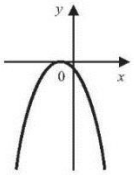
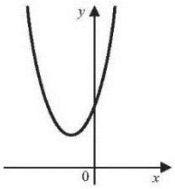
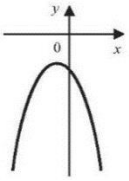


Имеем $p\in(4/5;1)$.

Ответ: 0,2.

1.2. Задачи, использующие расположение графика параболы относительно оси Ox

Прежде всего напомним все возможные случаи расположения параболы $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ относительно оси *Ox*.

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$	 I	 II
$D = 0$	 III	 IV
$D < 0$	 V	 VI

На рис. I и II парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось *Ox* в двух точках. В этом случае квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня и его дискриминант больше нуля.

На рис. III и IV парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается оси *Ox*, т.е. имеет с осью *Ox* одну общую точку. В этом случае квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень и его дискриминант равен нулю.

На рис. V и VI парабола не имеет общих точек с осью *Ox*, а квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней и его дискриминант меньше нуля.

Пример 1

При каких значениях параметра *k* уравнение $x^2 - x + k + 4 = 0$ не имеет действительных корней? В ответе указать наименьшее целое решение.

<u>Решение</u>

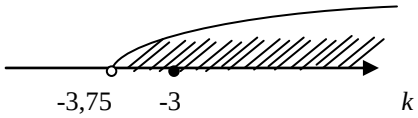
Так как у данного уравнения $a = 1$, т.е. $a \neq 0$, то $y = x^2 - x + k + 4$ является параболой при любом значении параметра *k*. Уравнение не имеет действительных корней, следовательно, этот случай соответствует рис. V; таким образом, квадратное уравнение $x^2 - x + k + 4 = 0$ имеет отрицательный дискриминант:

$$D < 0.$$

$$D = 1 - 4k - 16 < 0$$

$$k > -15/4$$

$$k \in (-3,75; +\infty).$$



Ответ: –3.

Пример 2

При каких значениях параметра a уравнение $(a+3)x^2+4x-2=0$ не имеет действительных корней? В ответе указать наибольшее целое решение.

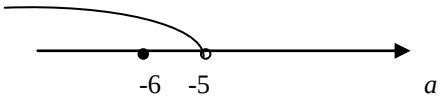
Решение

Для того чтобы в этом случае уравнение было квадратным, надо наложить дополнительное условие: $a+3\neq 0$. Тогда, как и в предыдущем случае, имеем $D<0$. Но надо рассмотреть еще и случай, когда $a+3=0$. В этом случае получаем линейное уравнение имеет вид: $4x-2=0$ т.е. имеем действительный корень $x=2$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+3\neq 0,\\ \dfrac{D}{4}<0,\end{cases}\\ \begin{cases}a+3=0,\\ 4x-2=0,\ \text{имеет действительный корень}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\neq -3,\\ 4+2\cdot(a+3)<0,\end{cases}\\ \varnothing.\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}a\neq -3,\\ a<-5.\end{cases}$$



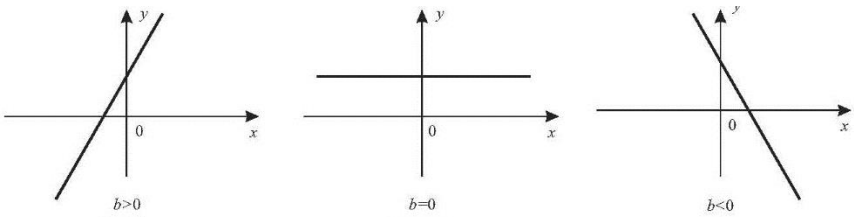
$a\in(-\infty;-5)$.

Наибольшее целое решение равно – 6.

Ответ: –6.

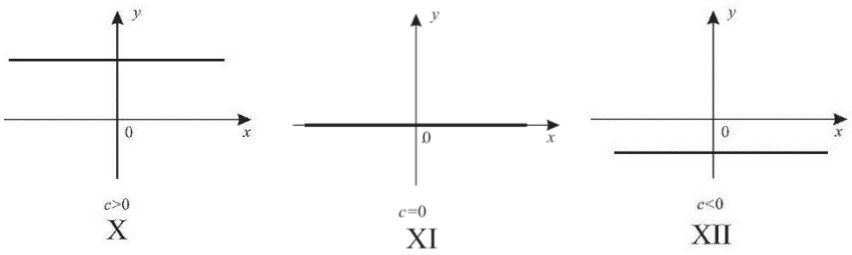
Проанализируем подробнее случай, когда в выражении $y = ax^2 + bx + c$ параметр $a = 0$.

В этом случае графиком функции $y = bx + c$ является прямая с угловым коэффициентом b.



VII VIII IX

Если угловой коэффициент $b\neq 0$, то уравнение вида $bx + c = 0$ имеет один действительный корень $x=-\dfrac{c}{b}$. Но если $b = 0$, прямая становится горизонтальной, ее формула $y = c$. Она либо не имеет с осью Ox общих точек, либо полностью с ней совпадает и имеет бесконечное множество общих точек, т.е. действительные корни отсутствуют в случае рис. X и XII.



§

Обобщим решение задачи: при каких значениях параметра уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a \neq 0\\ D < 0\end{cases} \quad \text{рис. V, VI}\\ \begin{cases}a = 0\\ b = 0\\ c \neq 0\end{cases} \quad \text{рис. X, XII}\end{array}\right.$$

Таким образом, имеем совокупность двух систем.

Пример 3

При каких значениях параметра k уравнение $(k-3)x^2+(k-3)x+3=0$ не имеет действительных корней. В ответе указать число значений k.

<u>Решение</u>

Согласно вышеизложенной схеме имеем совокупность двух систем.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k-3 \neq 0\\ (k-3)^2 - 4\cdot 3(k-3) < 0\end{cases}\\ \begin{cases}k-3=0\\ k-3=0\\ 3 \neq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k \neq 3\\ (k-3)(k-3-12) < 0\end{cases}\\ k = 3\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}(k-3)(k-15) < 0\\ k = 3\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}k \in (3;15) < 0\\ k = 3\end{array}\right. \quad k \in [3;15)$$

Ответ: 14.

Далее рассмотрим задачи типа: при каких значениях параметра трехчлен положителен при всех значениях x.

Функция является положительной при всех значениях x тогда и только тогда, когда ее график расположен выше оси Ox. Если функция имеет вид $y = ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ это возможно лишь на рис. V, т.е. $a > 0$ и $D < 0$. При $a = 0$ и $b = 0$ этому случаю соответствует рис. X, т.е. $c > 0$.

Таким образом, решением данной задачи является совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0,\\D<0,\end{cases}\\\begin{cases}a=0,\\b=0,\\c>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Аналогично решается задача: при каких значениях параметра трехчлен отрицателен при всех значениях *x*. Этому случаю соответствует совокупность следующих двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<0,\\D<0,\end{cases}\\\begin{cases}a=0,\\b=0,\\c<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

что соответствует рис. VI и XII.

Пример 4

При каких значениях параметра *m* неравенство $x^2+2(m+1)x+3m+13>0$ выполняется для любых *x*?

Так как *a* = 1, то второй случай можно не рассматривать. Это неравенство будет иметь место всегда, когда *D* < 0, т.е. *D*/4 < 0.

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac<0$$

$$(m+1)^2-(3m+13)<0$$

$$m^2+2m+1-3m-13<0$$

$$m^2-m-12<0$$

$$(m-4)\cdot(m+3)<0$$

Ответ: $m\in(-3;4)$.

Пример 5

При каких значениях параметра *a* трехчлен $(a+5)x^2+(a+5)x+2a+3$ неположителен. В ответе указать наибольшее значение параметра *a*.

«Трехчлен неположителен» означает, что он отрицателен или равен нулю, т.е. этому случаю соответствуют рис. IV, VI и рис. XI, XII.

Согласно вышеизложенным схемам имеем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<0\\D\le 0\end{cases}\\\begin{cases}a=0\\b=0\\c\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

Для нашего случая получаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+5<0\\(a+5)^2-4(a+5)(2a+3)\le 0\end{cases}\\\begin{cases}a+5=0\\a+5=0\\2a+3\le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

Так как *a* + 5 < 0, то на него можно разделить второе неравенство. При делении на отрицательное выражение знак неравенства меняется на противоположный.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+5<0\\(a+5)-4(a+5)(+2a+3)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}a=-5\\-10+3\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<-5\\a+5-8a-12\ge 0\end{cases}\\ a=-5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<-5\\-7a-7\ge 0\end{cases}\\ a=-5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<-5\\a\le -1\end{cases}\\ a=-5\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a\in(-\infty;-5)\\a=-5\end{array}\right. \Leftrightarrow a\in(-\infty;-5]$$

Ответ: –5.

1.3. Задачи на дополнительные условия расположения корней квадратного уравнения

Теорема 1. Для того чтобы оба корня квадратного уравнения были меньше, чем число x_0, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases}D\ge 0\\-\dfrac{b}{2a}<x_0\\a\cdot f(x_0)>0,\end{cases}$$

где $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Доказательство

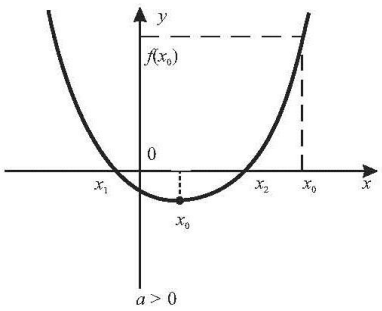


Рис. 1

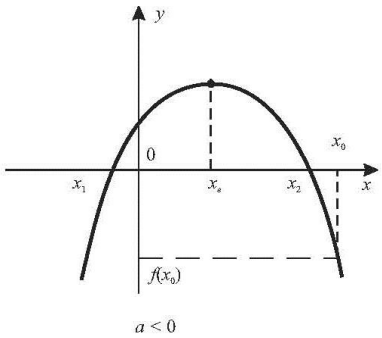


Рис. 2

Заметим, что корни могут совпадать, поэтому имеем $D\ge 0$. Если корни уравнения расположены левее точки x_0, то возможны два случая расположения параболы $y = ax^2 + bx + c$, изображенные на рис. 1 ($a > 0$) и на рис. 2 ($a < 0$). В обоих случаях вершина параболы должна быть левее x_0, следовательно, $x_в = -\dfrac{b}{2a} < x_0$.

Но для первого случая необходимо и достаточно выполнение условия $f(x_0)>0$, а для второго случая – выполнение условия $f(x_0)<0$.

Получаем совокупность двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\f(x_0)>0\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\f(x_0)<0\end{cases}\end{array}\right.$$

что равносильно условию: $af(x_0)>0$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Для того чтобы оба корня квадратного уравнения были больше, чем число x_0, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > x_0 \\ af(x_0) > 0. \end{cases}$$

где $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

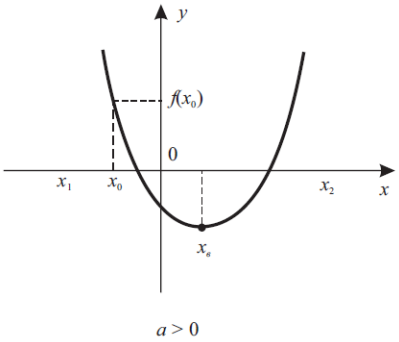


Рис. 3

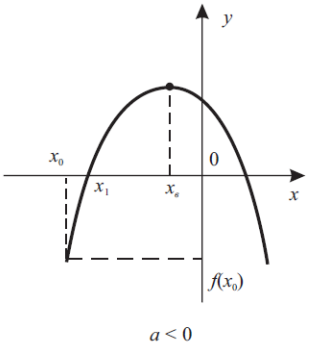


Рис. 4

Теорема 3. Для того чтобы один из корней квадратного уравнения был меньше, чем число x_0, а другой больше числа x_0, необходимо и достаточно, чтобы $af(x_0) < 0$.

Доказательство:

Разложим трехчлен на множители, где $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

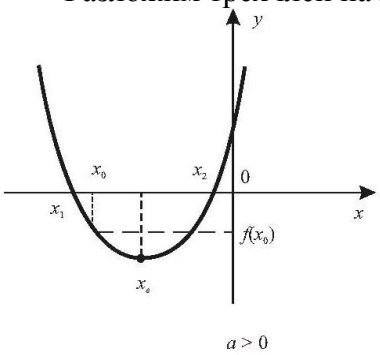


Рис. 5

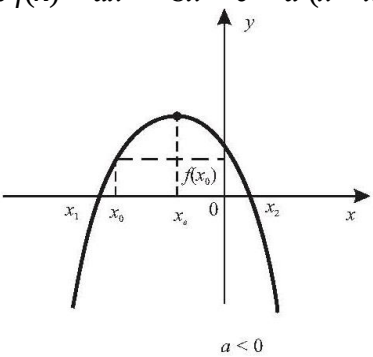
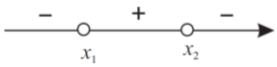


Рис. 6

При $a > 0$ имеем

а при $a < 0$



Так как $x_1 < x_0 < x_2$ – для первого случая $f(x_0) < 0$, а для второго случая $f(x_0) > 0$.

Имеем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0 \\ f(x_0) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ f(x_0) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

что эквивалентно $af(x_0) < 0$.

Заметим, что в данном случае условие $D \geq 0$ является лишним. Ведь если парабола расположена ветвями вверх и существует точка x_0, в которой график расположен ниже оси Ox, то парабола обязательно пересечет ось Ox (п. 1.2, рис. 1). Аналогично для случая $a < 0$, когда парабола расположена ветвями вниз, она также обязательно пересечет ось Ox (п. 1.2, рис. II).

Пример 1

Найти все значения параметра a, при которых оба корня (необязательно различные) уравнения $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ больше 3. В ответе указать наименьшее целое.

Решение

Из теоремы 2 имеем

$$\begin{cases} \frac{D}{4} \geq 0 \\ f(3) > 0 \\ -\frac{b}{2a} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a)^2 - 9a^2 + 2a - 2 \geq 0 \\ 9 - 18a + 2 - 2a + 9a^2 > 0 \\ 3a > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ 9a^2 - 20a + 11 > 0 \\ a > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ (a-1)\left(a - \frac{11}{2}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a - \frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(1\frac{2}{9}; +\infty\right)$$

Ответ: 2.

Пример 2

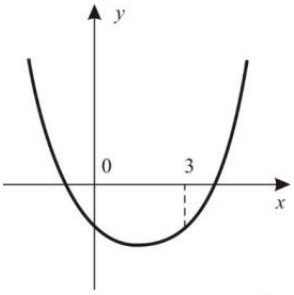
При каких значениях параметра p один корень меньше 0, а другой не меньше 3 для уравнения

$(p - 2)x^2 - px + 3 + p = 0.$

Решение

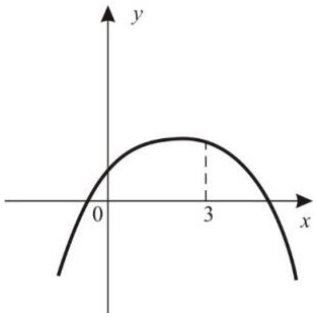
I случай

$$\begin{cases} p - 2 > 0 \\ f(0) < 0 \\ f(3) \leq 0 \end{cases}$$



II случай

$$\begin{cases} p - 2 < 0 \\ f(0) > 0 \\ f(3) \geq 0 \end{cases}$$



Объединим эти случаи:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} p > 0 \\ 3 + p < 0 \\ (p-2)9 - 3p + 3 + p \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} p < 2 \\ 3 + p > 0 \\ (p-2)9 - 3p + 3 + p \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ \begin{cases} -3 < p < 2 \\ 9p - 18 - 3p + 3 + p \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} -3 < p < 2 \\ 7p - 15 \geq 0 \end{cases}\right. \Leftrightarrow \varnothing$$ Ответ: $\varnothing$.

§ 2. Системы линейных уравнений с параметрами

Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Каждому уравнению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными соответствует некоторая прямая на плоскости *xOy,* а самой системе на плоскости соответствует пара прямых. Две прямые на плоскости могут либо пересекаться в одной точке, либо не иметь общих точек, либо совпадать.

Если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение; если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений; если прямые не имеют ни одной общей точки (являются параллельными), то это соответствует тому, что система решений не имеет.

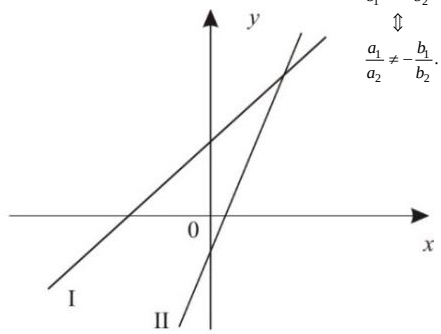
Если $b_1 \neq 0,$ то из первого уравнения выражаем *y* через *x*:

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}.$$

Таким образом, угловой коэффициент первой прямой

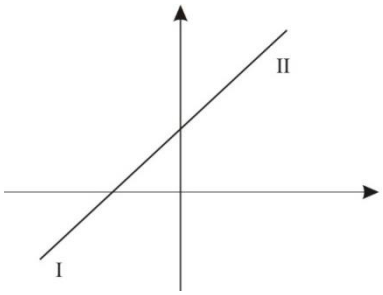
$$k_1 = -\frac{a_1}{b_1}.$$

$$k_1 \neq k_2$$
$$\Updownarrow$$
$$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2};$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{a_1}{a_2} \neq -\frac{b_1}{b_2}.$$



Для того чтобы система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы прямые пересекались.

Для того чтобы система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имела бесконечно много решений, необходимо и достаточно, чтобы прямые совпадали. Две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ совпадают тогда и только тогда, когда



$$\begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} -\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2}, \\ \dfrac{c_1}{b_1} = -\dfrac{c_2}{b_2}. \end{cases}$$

В результате получаем условие $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$

Заметим, что это условие означает, что одно уравнение системы получается из другого умножением на число.

В этих двух случаях система совместна. Поэтому, если требуется провести исследование, при каких условиях система линейных уравнений с двумя неизвестными совместна, рассматривают совокупность

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2},\\ \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}.\end{array}\right.$$

Для того чтобы система двух линейных уравнений с двумя неизвестными не имела решений (была несовместна), необходимо и достаточно, чтобы прямые были параллельны.

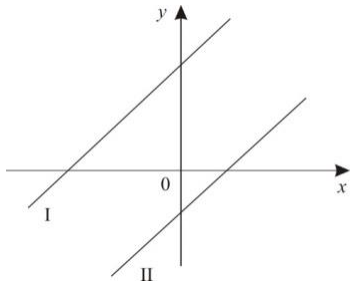
Две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда имеет место система

$$\begin{cases} k_1 = k_2, \\ b_1 \neq b_2. \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} -\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2}, \\ \dfrac{c_1}{b_1} \neq \dfrac{c_2}{b_2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}, \\ \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}. \end{cases}$$



Заметим, что во всех рассмотренных выше случаях мы предполагаем, что $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, т.е. рассматривались наклонные прямые. Для вертикальных и горизонтальных прямых надо сделать дополнительное исследование.

Пример 1

При каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} (1+2a)x + 5y = 7. \\ (2+a)x + 4y = 8 \end{cases}$$

не имеет решений?

<u>Решение</u>

Прямые должны быть параллельны.

I случай

$$\begin{cases} \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}, \\ \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1+2a}{2+a} = \dfrac{5}{4}, \\ \dfrac{5}{4} \neq \dfrac{7}{8}. \end{cases} \quad \text{истинно,}$$

$$4 + 8a = 10 + 5a,$$

$$3a = 6,$$

$$a = 2.$$

II случай

Если

$$\begin{cases} 1+2a=0, \\ 2+a=0. \end{cases}$$

то система

$$\begin{cases} y=\frac{7}{5}, \\ y=2 \end{cases}$$

представляет собой случай двух параллельных горизонтальных прямых.

Но так как $\begin{cases} a=-\frac{1}{2}. \\ a=-2 \end{cases}$ не имеет решений, то система имеет единственное решение.

Ответ: 2.

Пример 2

При каких значениях *a* система

$$\begin{cases} (a-11)x-5y=20, \\ 2x+ay=-4a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

<u>Решение</u>

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a-11}{2} \neq \frac{-5}{a}, \\ a=0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a^2-11a+10 \neq 0, \\ a=0; \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} a \neq 10, \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Ответ: $a \in (-\infty;1) \cup (1;10) \cup (10;+\infty)$.

Пример 3

При каких значениях *a* система

$$\begin{cases} (a-2)x+27y=4,5, \\ 2x+(a+1)y=-1 \end{cases}$$

имеет бесчисленное множество решений?

<u>Решение</u>

I случай

$$\frac{a-2}{2}=\frac{27}{a+1}=\frac{4,5}{-1}$$

$$\begin{cases} \frac{a-2}{2}=\frac{4,5}{-1}, \\ \frac{27}{a+1}=\frac{4,5}{-1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-2=-9, \\ \frac{6}{a+1}=-1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-7, \\ a=-7 \end{cases}$$

$$a=-7$$

II случай
Если $a + 1 = 0$, то прямая является наклонной, а вторая – вертикальной, и они имеют единственную точку пересечения.
Ответ: –7.

Пример 4
При каких значениях a система уравнений
$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax + y = a^2; \end{cases}$$
Имеет хотя бы одно решение?

Решение

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{a} \neq \frac{a}{1}, \\ a = 0, \\ \frac{1}{a} = \frac{a}{1} = \frac{1}{a^2}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a^2 \neq 1, \\ a = 0, \\ \\ \begin{cases} a^2 = 1, \\ a^3 = 1; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a \neq \pm 1, \\ a = 1; \end{array}\right.$$

$a \neq -1.$

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

§ 3. Линейные уравнении с параметром

Линейное уравнение с параметром можно представить как частный случай системы линейных уравнений, приравняв к y левую и правую части уравнения.

Пример 1
При каких значениях параметра n уравнение $(n – 1)x + 2 = 3n + x$ не имеет решений?

Решение

I способ. Приравняв к y обе части, получаем систему
$$\begin{cases} y = (n-1)x + 2, \\ y = 3n + x. \end{cases}$$
Она равносильна системе
$$\begin{cases} (n-1)x - y = -2, \\ x - y = -3n. \end{cases}$$
В силу вышесказанного про системы, она не имеет решения тогда и только тогда, когда
$$\frac{1}{n-1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-3n}{-2}$$
$$\begin{cases} n - 1 = 1 \\ 3n \neq +2. \end{cases}$$
Ответ: 2.
Но уравнение можно решить, не прибегая к системе. Любое линейное уравнение можно привести к виду $ax = b$. Далее возможны три случая:

1) $a \neq 0$, тогда $x = \frac{b}{a}$. В этом случае уравнение имеет единственное решение.

2) $a = 0;\ b \neq 0.$
Тогда получаем равенство $0x = b$, где $b \neq 0$.
Это равенство не выполняется ни при каких x.
Уравнение такого вида называется противоречивым. У него нет решений.
3) $a = 0$; $b = 0$.
В этом случае имеем $0x = 0$.
Это равенство выполняется при любом x.
Такое уравнение называется тривиальным. Его решение: $x \in (-\infty; +\infty)$.
Рассмотрим решение примера 1 другим способом.
II способ
$(n - 1)x + 2 = 3n + x$,
$(n - 1 - 1)x = 3n - 2$,
$(n - 2)x = 3n - 2$.
Если $n - 2 \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{3n-2}{n-2}$.
Если $n - 2 = 0$, то $n = 2$ и $3n - 2 \neq 0$, следовательно, получаем противоречивое уравнение.
Ответ: 2.

§4. Неравенства с параметром

Неравенства с параметром решаются несложно, по аналогии с уравнениями.
Пример 1
Найти значение параметра a, при котором наименьшее решение неравенства $\frac{ax-14}{x} \geq 4$ равно –2.

Решение

$\frac{ax-14}{x} \geq 4,$
$\frac{ax-14-4x}{x} \geq 0,$
$\frac{(a-4)x-14}{x} \geq 0.$
Возможны три случая:
I. $a - 4 > 0$.
В этом случае $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{14}{a-4}; +\infty\right)$ и наименьшего значения нет.
II. $a - 4 = 0$
$\frac{-14}{x} \geq 0,$
$x < 0$ и наименьшего значения нет.
III. $a - 4 < 0$
$x \in \left[\frac{-14}{a-14}; 0\right).$
Только в третьем случае есть наименьшее значение.
$\frac{14}{a-4} = -2,$
$7 = -a + 4,$
$a = -3.$
Ответ: –3.

§5. Уравнения с параметром и модулем

Для решения уравнений вида $|x-a|=kx+b$ рассмотрим возможное расположение графиков прямой $y = kx + b$ и модуля $y=|x-a|$.

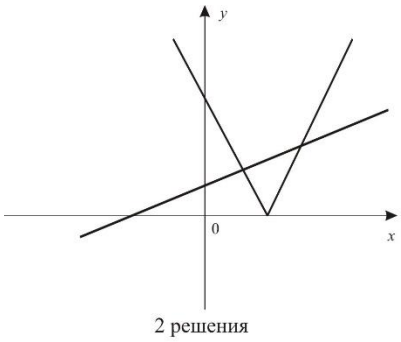


Рис. 1

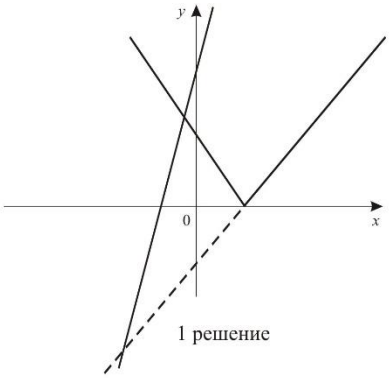


Рис. 2

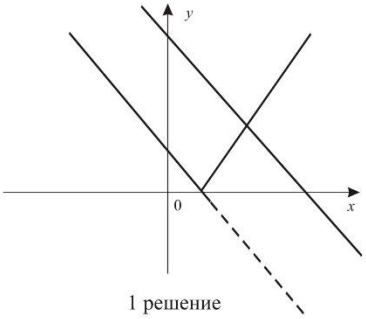


Рис. 3

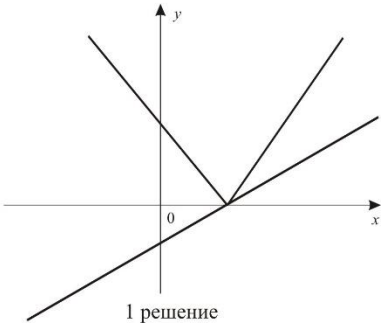


Рис. 4

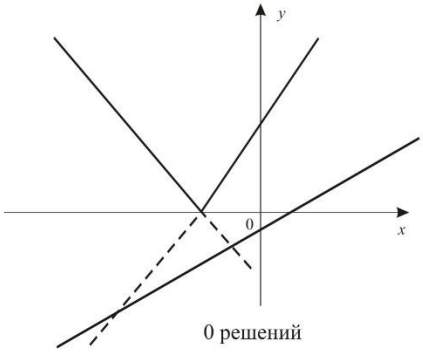


Рис. 5

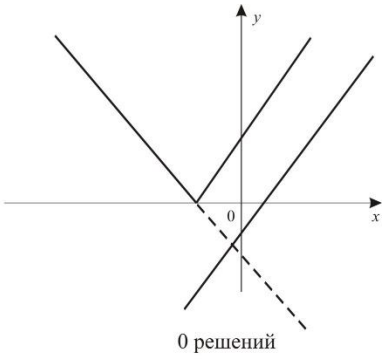


Рис. 6

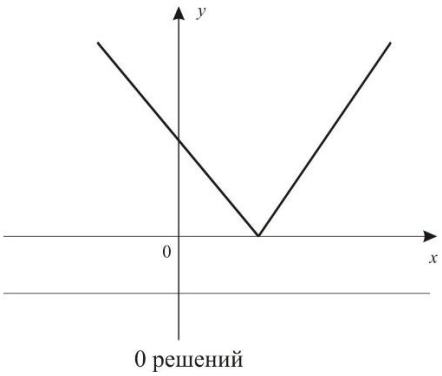


Рис. 7

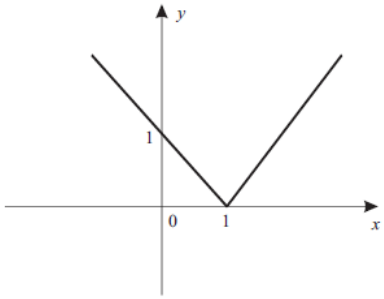
Пример 1

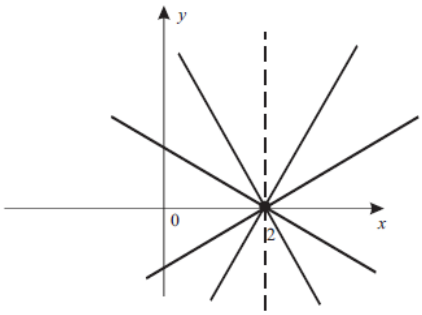
Найти наибольшее значение k, при котором уравнение $|x-1|=k(x-2)$ не имеет решений.

<u>Решение</u>

Строим графики $y=|x-1|, y=k(x-2)$

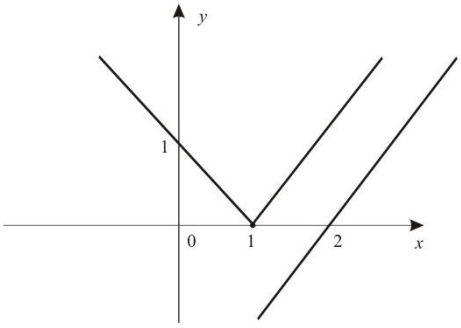
I способ



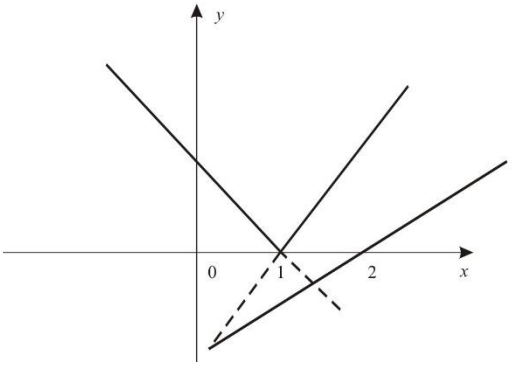


$y=|x-1|$ $\qquad$ $y=k(x-2)$

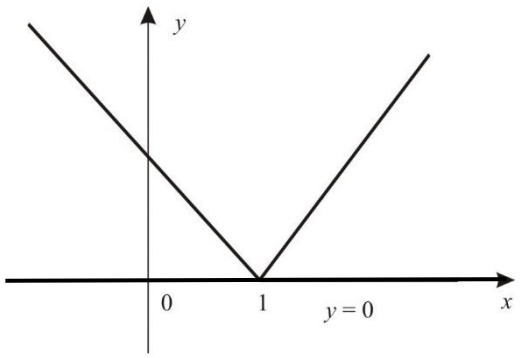
Второй график представляет собой совокупность прямых, проходящих через т. (2; 0) со всевозможными значениями k. Отсутствию решений соответствует случай, изображенный на рис. 6.



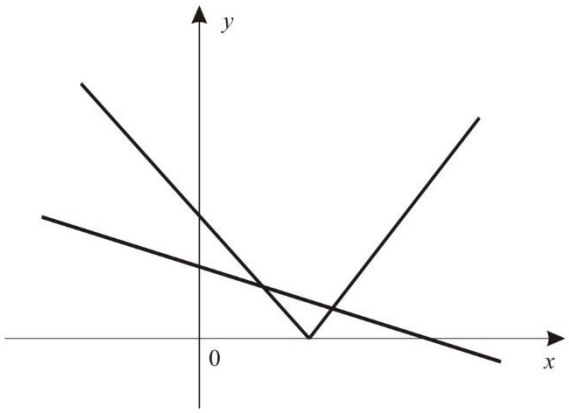
Прямая $y= x - 2$ при $k = 1$ параллельна прямой $y = x - 1$.
При $0 < k < 1$ имеем случай, изображенный на рис. 5.



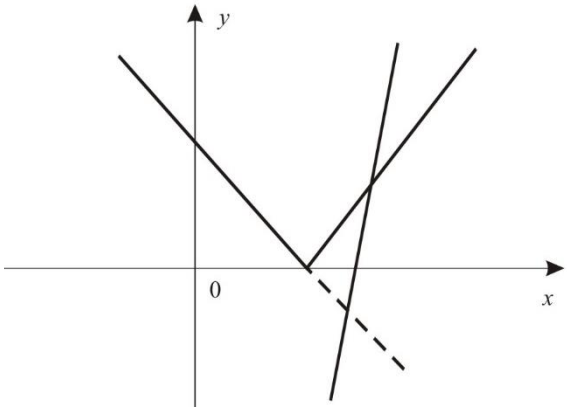
Но если $k = 0$, то имеем случай, соответствующий рис. 4, т.е. один корень.



Если $k < 0$, то имеем случай, изображенный на рис. 1. т.е. два корня.

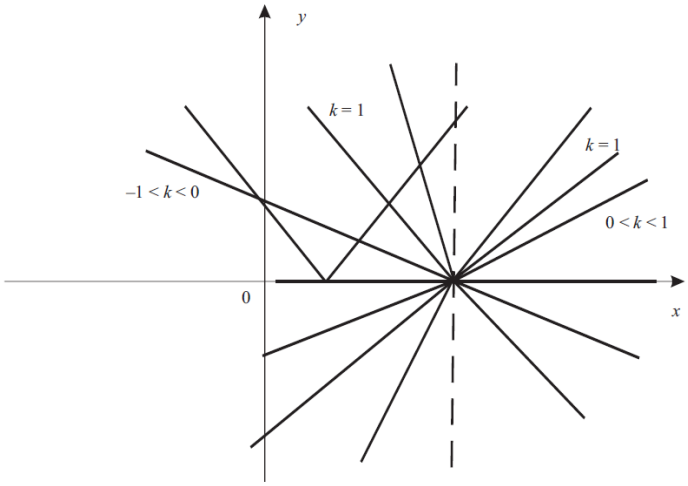


Если $k > 1$, то имеем случай, изображенный на рис. 2, т.е. один корень.



Все случаи рассмотрены. Уравнение не имеет решения при $0 < k \leq 1$.
Ответ: $k \in (0;\ 1]$.

II способ.
Можно все вышесказанное изобразить на одном графике.



$k \in (0;\ 1]$.

Задания, в которых встречаются два модуля, представляют большую трудность, но решаются аналогично.

Пример 2

Найти все значения *b*, при которых уравнение $|x-1|-|x-3|=x+b$ имеет два решения.

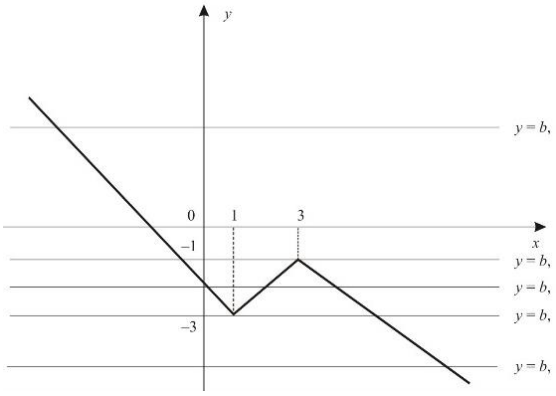
Строим график функции $y=|x-1|-|x-3|-x$ и рассмотрим возможные положения этого графика относительно прямой
y = *b*.

$$y=\left[\begin{array}{ll} -x+1+x-3-x=-x-2 & x<1 \\ x-1+x-3-x=x-4 & 1\le x<3 \\ x-1-x+3-x=-x+2 & x\ge 3 \end{array}\right.$$

x	–2	0
y	0	–2

x	0	4
y	–4	0

x	3	5
y	–1	–3



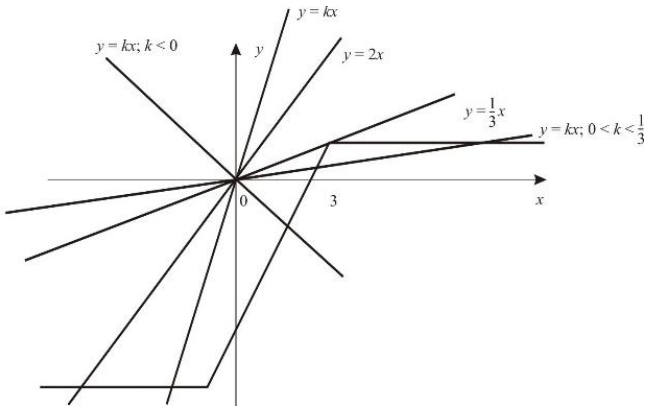
Ответ: {–1; –3}.

Пример 3

Найти все значения параметра k, при котором уравнение $|x+2|-|x-3|=kx+4$ имеет 3 решения.

Строим график функции $y=|x+2|-|x-3|-4$ и рассмотрим всевозможные положения этого графика относительно прямой $y-kx$.

$$y=|x+2|-|x-3|-4=y=\left[\begin{array}{ll} -x-2+x-3-4=-9 & x<-2 \\ x+2+x-3-4=2x-5 & -2\le x<3 \\ x+2-x+3-4=1 & x\ge 3 \end{array}\right.$$



$k=0$ – 1 решение

$0<k<\frac{1}{3}$ – 3 решения

$k=\frac{1}{3}$ – 2 решения

$\frac{1}{3}\le k<2$ – 1 решение

$k\ge 2$ – 1 решение

$k<0$ – 1 решение

Ответ: $k\in\left(0;\frac{1}{3}\right)$.